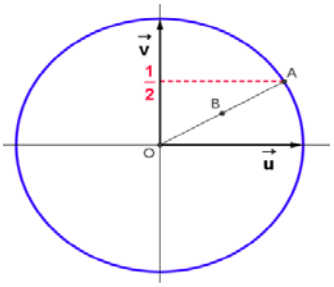
EXERCICE N°1 — 3 points — 15 ' — CONTRÔLE 2012

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des propositions suivantes en justifiant la réponse.

1°) $\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{5}}$ est une racine cinquième de $4\sqrt{2}$.

2°) Dans la figure ci-contre, $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et A est un point du cercle trigonométrique d'ordonnée $\frac{1}{2}$.

Si B est le milieu du segment $[OA]$ alors l'affixe du point B est $\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}i$.



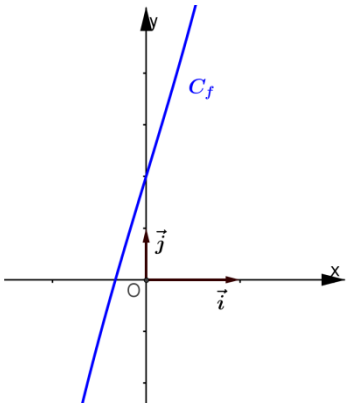
3°) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Si M et N sont les points d'affixes les solutions de l'équation $4z^2-5z-(3+2i)=0$.

alors l'affixe du milieu du segment $[MN]$ est un réel.

EXERCICE N°2 — 6 points — 35 ' — PRINCIPALE 2013

I- Dans la figure ci-contre, on a représenté dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe C_f de la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3+6x+2$.



1°) Justifier que l'équation $x^3+6x+2=0$ admet dans IR une solution unique α.

2°) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

II- On se propose dans cette partie de déterminer la valeur exacte de α.

1°) On considère dans $\mathbb{C}$ les équations $(E_1): z^3=2$ et $(E_2): z^3=-4$.

a) Justifier que les solutions de (E_1) sont $a_1=\sqrt[3]{2}$, $a_2=\sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3=\sqrt[3]{2}\ e^{i\left(\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

b) Justifier que les solutions de (E_2) sont $b_1=-\sqrt[3]{4}$, $b_2=\sqrt[3]{4}\ e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3=\sqrt[3]{4}\ e^{i\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$.

c) Vérifier que $a_1b_1=a_2b_2=a_3b_3=-2$.

2°) Soient a et b deux nombres complexes vérifiant $a^3+b^3=-2$ et $ab=-2$.

a) Vérifier que $(a+b)^3=-2-6(a+b)$.

b) En déduire que $a+b$ est une solution de l'équation $z^3+6z+2=0$.

3°) Déduire les solutions de l'équation $z^3+6z+2=0$.

4°) Conclure.

: 23390248 - 29862267
Tous droits réservés © TakiAcademy.com

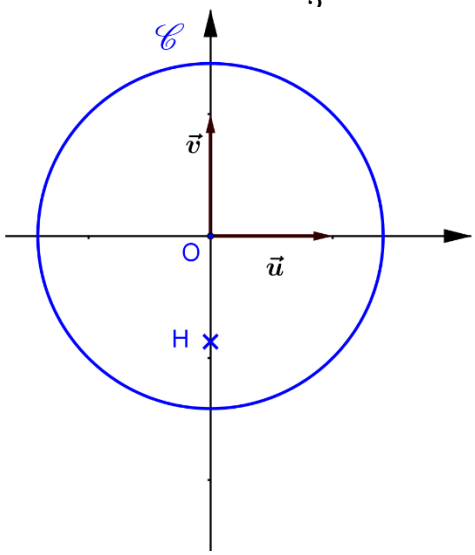
1°) Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe z, $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}\ z - 2$.

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2.

2°) Dans la figure ci-contre, on a tracé le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ et on a placé le point H d'affixe $\frac{-i\sqrt{3}}{2}$.



a) Montrer que M_1 et M_2 appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.

b) Justifier que H est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

c) Construire les points M_1 et M_2.

3°) Soit K le point d'affixe $-i\sqrt{3}$.

Soit z un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives z et z^3.

a) Montrer que :

(K est le milieu du segment $[MN]$) si et seulement si ($z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$).

b) Vérifier que $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}\ z - 2)$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$.

d) Construire alors les points N_1 et N_2 d'affixes respectives z_1^3 et z_2^3

(On rappelle que z_1 et z_2 sont les affixes des points M_1 et M_2).

e) Déterminer l'affixe a d'un point A de l'axe $(O, \vec{v})$ dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe a^3.

: 23390248 - 29862815
Tous droits réservés © TakiAcademy.com